الفصل الأول — "المحاضرة الثانية"

← $Ax=b$ لها حل خطي.

← كل $b \in \mathbb{R}^n$ هو ارتباط خطي لأعمدة المصفوفة A.

← $SPAN\{a_1, a_2, ..., a_n\}$

← في المصفوفة A عنصر ارتكاز في كل سطر.

(*) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ ، هل النظام $Ax=b$ قابل للحل من أجل جميع قيم b ؟؟ (Ex)

(الحل): في المصفوفة A هناك عمودين فقط وبالتالي فإنها تملك على الأغلب عنصري ارتكاز وبما أن A لا تملك عنصر ارتكاز في كل سطر فإن النظام الخطي المعطى لدينا غير قابل للحل وذلك استناداً للنظرية السابقة

(*) هل أعمدة المصفوفة A تولد الفضاء $\mathbb{R}^3$ حيث أن: (Ex)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

(الحل) $R_2 = 2R_1$ (يوجد لدينا سطرين فقط) واعتماداً على النظرية السابقة فإن أعمدة A لا تولد فضاء $\mathbb{R}^3$ أي أن $SPAN\{a_1, a_2, a_3\} \neq \mathbb{R}^3$

(*) النظام الخطي المتجانس "linear Homunic system"

- يعرف النظام الخطي المتجانس على أنه نظام من الشكل $Ax=0$ حيث أن المصفوفة من النمط $m \times n$ ، $x \in \mathbb{R}^n$ و الصفر هو الشعاع الصفري.

- إن للنظام الخطي المتجانس حل دائم هو الحل الصفري // الحل الشاذ $x=0$ //

Scanned by CamScanner

EX $\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ — هل يوجد حل للنظام الخطي المتجانس

الحل: $\begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 10 & 0 \\ 2 & 20 & 0 \end{bmatrix}$ ، ∴

(X_2) is Frea (X_2 متغير اختياري) أي أن النظام قابل للحل ويملك عدد غير منتهٍ من الحلول.

ملاحظة: إن للنظام الخطي المتجانس $AX=0$ حلولاً لانهائية حيث احتوت جملة المعادلات الخطية على متغير اختياري واحد على الأقل.

(*) الاستقلال الخطي والارتباط الخطي

«linear dependence and Independence»

← نقول عن مجموعة أشعة $V_1, V_2, ..., V_p \in \mathbb{R}^n$ أنها مستقلة خطياً إذا كان للمعادلة الشعاعية المعطاة بالعلاقة $X_1V_1+X_2V_2+...+X_nV_n=0$ حلاً وحيداً هو الحل الصفري.

← نقول عن مجموعة الأشعة أنها مرتبطة خطياً إذا وجدت القيم $c_1, c_2, ..., c_p$ (ليست جميعها معدومة) بحيث يكون $c_1V_1 + c_2V_2 + ... + c_p \cdot V_p = 0$ علاقة الارتباط الخطي.

EX: لتكن لدينا الأشعة $V_1=\begin{pmatrix}1\\3\\5\end{pmatrix}$ ، $V_2=\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix}$ ، $V_3=\begin{pmatrix}-3\\9\\3\end{pmatrix}$

1- بين إذا كانت هذه الأشعة مستقلة خطياً؟

2- أوجد علاقة الارتباط الخطي إن أمكن؟؟

الحل:

$X_1V_1 + X_2V_2 + X_3V_3 = 0$

$X_1 + 2X_2 - 3X_3 = 0$ ①

$3X_1 + 5X_2 + 9X_3 = 0$ ②

$5X_1 + 9X_2 + 3X_3 = 0$ ③

$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & 9 & 0 \\ 5 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right]$ $-3R_1+R_2 \to R_2$, $-5R_1+R_2 \to R_2$, $-R_2+R_3 \to R_3$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right]$

② أوجد علاقة الارتباط الخطي $\boxed{-33V_1+18V_2+V_3=0}$

وهي علاقة الارتباط الخطي.

Scanned by CamScanner

Ex لتكن الأشعة $u_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ، $u_2=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ ، $v_1=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ ، $v_2=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$

ⓐ حدد فيما إذا كانت $[v_1, v_2]$ مرتبطين أم مستقلين خطياً ؟؟

ⓑ حدد فيما إذا كانت $[u_1, u_2]$ مرتبطين أم مستقلين خطياً ؟؟

ⓒ وضح ذلك بيانياً .

✱ التحويلات الخطية «linear Transformation»

- نقول عن التحويل T من فضاء $\mathbb{R}^m$ إلى $\mathbb{R}^n$: $T: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

هو قاعدة لمقابلة كل شعاع $\mathbb{R}^m$ بشعاع في $\mathbb{R}^n$ وذلك وفق T .

Ex - لتكن A المصفوفة المعطاة على الشكل $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -3\\ -5 & 10 & -15\end{bmatrix}$ ، $b=\begin{bmatrix}-2\\-10\end{bmatrix}$ ، $c=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}$

ولتكن التحويل الخطي $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \; : T(x) = Ax$

1- أوجد الشعاع $X \in \mathbb{R}^3$ بحيث يكون $T(x)=b$.

2- هل يوجد شعاع آخر خلاف لـ (x) صورته وفق T هي (b) {مسألة وجدانية}

3- بين فيما إذا كان c هو المستقر الفعلي لـ T .

الحل: 1- $T(x)=b \Rightarrow A(x)=b$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 3 & 2\\ -5 & 10 & -15 & -10\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

$(x_2 , x_3$ are free$)$ ⟸ يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول فعلى سبيل المثال:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \Longleftarrow x_1=2 \Longleftarrow \begin{cases}x_2=0\\x_3=0\end{cases}$$

2- لدينا متحولات اختيارية وبالتالي يوجد عدد غير منتهٍ من X تحقق العلاقة $\boxed{T(x)=b}$

3- $T(x)=c \Rightarrow A(x)=c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & -3 & 3\\ -5 & 10 & -15 & 0\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}-1 & 2 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -15\end{array}\right]$$

⟸ (c) ليست مستقراً لـ T

Scanned by CamScanner

«SPANNing Set» — * تعريف مجموعة الامتداد :

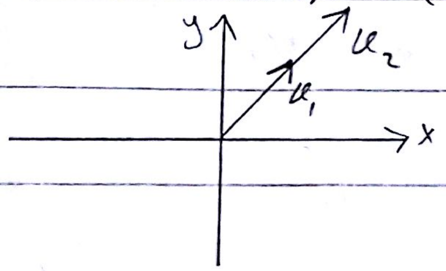
- ليكن $v_1, v_2, \dots, v_p$ عندئذٍ نسمي المجموعة التي تضم كافة التراكيب الخطية للأشعة $v_1, v_2, \dots, v_p$ بمجموعة الامتداد وعادةً ما نرمز لها بـ $SPAN\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$

وبكلام آخر أي أنه مجموعة الامتداد وهي مجموعة كل الأشعة التي يمكن كتابتها بالشكل : $x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p$ حيث $x_1, x_2, \dots, x_p$ هي قيم ثابتة .

EX لتكن $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ و $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ أوجد شعاع مجموعة الامتداد $SPAN\{v_1, v_2\}$ ومن ثم صف هذه المجموعة $\{v_1, v_2\}$ هندسياً .

الحل

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix}$$



v_1 يقع على امتداد v_2

تعريف :- نقول إن أعمدة المصفوفة A : $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$

تولد الفضاء $\mathbb{R}^n$ إذا كان كل شعاع $b \in \mathbb{R}^n$ هو عبارة عن تركيب خطي لأعمدة المصفوفة

أي أن $a_1, a_2, \dots, a_n$: $SPAN\{a_1, a_2, \dots, a_n\} = \mathbb{R}^n$

Scanned by CamScanner